

# 超回復を考慮した最適なトレーニング計画 Optimal Training Plans on Physical Performance Considering Supercompensation

和田 直也<sup>†</sup> 伊藤 弘道<sup>†</sup>

Naoya Wada<sup>†</sup> Kodo Ito<sup>†</sup>

<sup>†</sup> 鳥取大学 工学部

## 1 概要

本研究では、超回復を考慮した最適なトレーニング計画について説明する。超回復を考慮したフィットネスと疲労の数学モデルを確立することにより、トレーニング期間中の累積フィットネスを最大化し、遅れ疲労の発生を最小化する最適なトレーニング計画について説明する。

## 2 はじめに

筋力トレーニングとは、日常生活では必要としない特別な運動をして、身体の運動能力を向上させることであり、特に身体の発揮するパワーを増大させることである。筋力トレーニングは、アスリートのトレーニングだけではなく生活習慣病の改善やリハビリテーションでも実施されている。筋力トレーニングでは、日常における負荷を越えた負荷を印加しなければならない(過負荷の原則)が、特にアスリートのトレーニングでは、肉体が耐えられる限界に負荷が設定される。筋力トレーニングにより体力が向上する仕組みとして、超回復と呼ばれる現象が知られている。適切な負荷で筋力トレーニングを行えば、筋肉を一時的に疲労させるが、一定時間の後には負荷を与える前よりも筋活動水準が高いレベルにまで回復をする。このような現象を超回復と呼ぶ。トレーニングを継続することで、超回復の効果が得られ、当初は不可能であったレベルの負荷にもやがて耐えられるようになる。一方、トレーニングで注意すべきことは、過負荷によるダメージである。19世紀末に示されたルーの3原則によれば、過剰な負荷(オーバートレーニング)は筋肉の発達を阻害するとされている。過剰な負荷による疲労は、トレーニングの直後ではなく一定の時間を越えて現れるからであり、この現象を遅れ疲労(Delayed Onset Muscle Soreness(DOMS))と呼ぶ。この遅れ疲労が、トレーニング継続が不可能なレベルであるほど大きければ、最初は無可能であったトレーニングがやがて継続できなくなり、結果としてそのトレーニングは失敗に終わる。従って、アスリートのトレーニングでは、肉体の限界に近い負荷が望ましいが、遅れ疲労に耐えられるレベルにまで抑えなければならない。トレーニングが厳しいならば遅れ疲労のためにトレーニング継続時間が減少し、逆にトレーニングが緩いならば、体力向上の効果が低減してしまう。従って、適度な疲労で体力向上

効果を最大にするトレーニングが存在する可能性がある。一般者が日常生活のなかで行う筋力トレーニングでは、このように効果を最大にする筋力トレーニング計画が有用であると思われる。

最適なトレーニング強度の分析には、数学的トレーニングモデルが必要であり、そのようなモデルがすでに多く知られている。これらのモデルは、おおきく、フィットネス疲労モデル(FFモデル)[1]とパフォーマンスポテンシャルモデル(PerPot)[2]という2つのタイプに分類される。フィットネスとは、トレーニングにより得られる効果を示し、これが大きいほど体力が向上することになる。FFモデルとPerPotのパラメータはアスリートにとって直感的ではないため、すべてのパラメータがアスリートにとって直感的に馴染みのある数学モデルが必要である。また、FF-ModelとPerPotはどちらも数値的に計算できるが、最適な計画を解析的に表示することはできない。本研究では、すべてのパラメータがアスリートにとって直感的な経験的トレーニングモデルを確立し、最適なトレーニング計画を解析的に議論する。

## 3 モデルの説明

2つの関数 $P_1(t)$ と $Q_1(t)$ はトレーニング時間 $t$ の増加によりフィットネスと疲労が増加することを示す。過去の数学的モデルでは、一般に図1に示すようにトレーニング時間でフィットネスが変化する。フィットネスの増加率は、トレーニングの開始時に著しく上昇し、トレーニング時間で徐々に鈍化する[3,4]。この傾向は直感的に受け入れられる。

以下の式を定義する。

$$P_1(t) = a_0(1 - e^{-\mu t}), \quad (1)$$

$a_0(a_0 > 0)$ はフィットネスの限界であり、 $\mu(\mu > 0)$ はトレーニング強度に比例する定数である。

血中乳酸濃度が疲労の程度に等しい場合、疲労は一般に図1に示すトレーニング時間で変化する。また、最大筋収縮力に近い筋肉トレーニングでは、トレーニング負荷により筋肉疲労が急速に増加し、指数関数で近似できることが報告されている[5]。疲労の増加率は、トレーニングの開始時に緩やかであり、トレーニング時間とともに徐々に増加する。これらの傾向は直感的に受け入れられる。

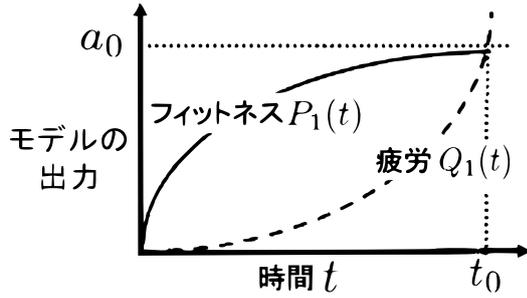


図 1: フィットネスと疲労を示す数学的モデル.

以下の式を定義する.

$$Q_1(t) = e^{\lambda t} - 1, \quad (2)$$

$\lambda (\lambda > 0)$  はアスリートの体力に関する比例定数である.  
 $t_0$  は,  $P_1(t_0) = Q_1(t_0)$  を満たす時間である. そのとき, (1) と (2) から, 以下の式を得る.

$$\frac{e^{\lambda t_0} - 1}{1 - e^{-\mu t_0}} = a_0. \quad (3)$$

このモデルでは,  $t_0$  はフィットネス・疲労分岐点であり, フィットネス関数と疲労関数の交点である.  $t < t_0$  の場合, フィットネス  $P_1(t)$  は疲労  $Q_1(t)$  より大きく, アスリートは身体的ストレスなしでトレーニングを続けることができる.  $t \geq t_0$  の場合, 疲労  $Q_1(t)$  はフィットネス  $P_1(t)$  より大きく, アスリートはトレーニングを続けるために身体的ストレスに耐える必要がある. アスリートは 1 日において  $T_0 (> t_0)$  までトレーニングを継続する必要があるため, 時間  $t_0$  から時間  $T_0$  までトレーニングを継続するように強制される. アスリートにとって時間  $t_0$  は, トレーニングが楽にこなせる内容からハードワークに変わる感覚の通過点である.

事前に設定したトレーニングの後, アスリートは休憩を取り, 毎日のトレーニングメニューが終了するまでトレーニングと休憩を交互に繰り返す.  $t$  がトレーニング時間,  $\tau$  が休憩時間,  $t + \tau$  がトレーニングのサイクルの場合, トレーニングサイクルの終了時のフィットネス  $P_2(t, \tau)$  と疲労  $Q_2(t, \tau)$  は, それぞれ

$$\begin{aligned} P_2(t, \tau) &= a_0 \left[ 1 - e^{-\mu(t-a_1\tau)} \right], \\ Q_2(t, \tau) &= e^{\lambda(t-a_2\tau)} - 1, \end{aligned} \quad (4)$$

ここで,  $a_1$  と  $a_2$  は定数である.

$t_j + \tau_j$  が  $j$  番目のトレーニングサイクルであり, アスリートが 1 日に  $n$  サイクルトレーニングを継続する場合, フィットネスである  $P_3(t, \tau)$  と一日の終わりの疲労  $Q_3(t, \tau)$  は, それぞれ,

$$\begin{aligned} P_3(t_1, t_2, \dots, t_n; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \\ = a_0 \left\{ 1 - \exp \left[ -\mu \sum_{j=1}^n (t_j - a_1 \tau_j) \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_3(t_1, t_2, \dots, t_n; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \\ = \exp \left[ \lambda \sum_{j=1}^n (t_j - a_2 \tau_j) \right] - 1. \end{aligned} \quad (5)$$

$n_i$  が  $i$  日目のトレーニングサイクルの数である場合,  $i$  日目の総フィットネス  $P_3$  は

$$\begin{aligned} P_3(t_{1i}, t_{2i}, \dots, t_{ni}; \tau_{1i}, \tau_{2i}, \dots, \tau_{ni}) \\ = a_0 \left\{ 1 - \exp \left[ -\mu \sum_{j=1}^{n_i} (t_j - a_1 \tau_j) \right] \right\} \equiv D_i. \end{aligned} \quad (6)$$

1 日の体調は前日の疲労の影響を受けるため, これを残留疲労と呼ぶ. 残留疲労は前日の総フィットネスに比例し, 前日のトレーニングの総時間に反比例すると仮定する.  $a_3$  が一定の場合,  $i$  日目の残留疲労  $\beta_i$  は

$$\beta_i \equiv \frac{a_{3i} D_i}{\sum_{j=1}^{n_i} t_j} \quad (i \geq 1), \quad (7)$$

ここで,  $\beta_0 \equiv 0$  である. 前日の残留疲労  $Q_4$  を考慮した  $i$  日目の疲労は,

$$\begin{aligned} Q_4(t_{1i}, t_{2i}, \dots, t_{ni}; \tau_{1i}, \tau_{2i}, \dots, \tau_{ni}) \\ = \exp \left[ \lambda \sum_{j=1}^{n_i} (t_j - a_2 \tau_j) + \sum_{k=1}^{i-1} \beta_k \right] - 1 \equiv E_i. \end{aligned} \quad (8)$$

トレーニングを継続することにより, アスリートの身体機能が向上し, 以前は耐えられなかったトレーニングに耐えることができるようになる. このような現象は超回復によって引き起こされるため, 身体的向上は超回復の効果を表す. アスリートの身体的向上が累積フィットネスに比例する場合,  $i$  日目の身体的向上は

$$\alpha_i \equiv a_4 \sum_{k=1}^i D_k, \quad (9)$$

ここで,  $a_4$  は定数であり,  $\sum_{k=1}^0 \equiv 0$  である. 超回復を考慮すると,  $i$  日目の限界疲労レベル  $q_i$  は

$$q_i \equiv q_0 + \alpha_{i-1}, \quad (10)$$

ここで,  $q_0$  はトレーニング開始時の限界疲労レベルである.

$i$  日目には限界疲労レベル  $q_i$  が制限されており, アスリートは  $q_i$  を超えてトレーニングを続けることができない. 1 日の制限時間は  $T_0$  で, アスリートは  $T_0$  を超えてトレーニングを続けることはできない. アスリートは, 限界疲労レベル  $q_i$  または時間  $T_0$  のいずれかに達したとき, 毎日のトレーニングを終了する. そのとき,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_i} (t_j + \tau_j) \leq T_0, \\ \exp \left[ \lambda \sum_{j=1}^{n_i} (t_j - a_2 \tau_j) + \sum_{k=1}^{i-1} \beta_k \right] - 1 \leq q_i. \end{aligned} \quad (11)$$

$m$  日間のトレーニングの後、 $m$  日目の累積フィットネスは  $D_0$  は  $D_0 = \sum_{k=1}^m D_k$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) である。 $\mu$  はトレーニング強度に比例し、アスリートの状態を考慮して適切に調整する必要があるため、 $m$  日間のトレーニングを通して累積フィットネスを最大化する最適なトレーニング強度である最適な  $\mu$  を導出する。

毎日のトレーニングメニューが同じである場合トレーニング期間中、 $t_j = t$  および  $\tau_j = \tau$  となる。

$$\sum_{j=1}^{n_i} (t_j + \tau_j) = n_i(t + \tau),$$

(6), (8), (11) はそれぞれ,

$$D_i = a_0 \{1 - \exp[-n_i \mu(t - a_1 \tau)]\}, \quad (12)$$

$$E_i = \exp \left[ n_i \lambda(t - a_2 \tau) + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{a_{3k} D_k}{n_k t} \right] - 1, \quad (13)$$

$$n_i(t + \tau) \leq T_0,$$

$$\begin{aligned} \exp \left[ n_i \lambda(t - a_2 \tau) + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{a_{3k} D_k}{n_k t} \right] - 1 \\ \leq q_0 + a_4 \sum_{k=1}^{i-1} D_k. \end{aligned} \quad (14)$$

$t$  と  $\tau$  が事前に決定されている場合、 $D_0$  は  $\mu$  の関数である。

#### 4 最適計画

$x$  が十分に小さい時、以下の近似式が成立する。 $\exp(-\mu x) \approx 1 - \mu x$ ,  $\exp(\lambda x) \approx 1 + \lambda x$ . したがって、 $a_{3k} \equiv 0$  ( $k < i - 1$ ),  $a_{3i} \equiv a_{30}$  のとき

$$\begin{aligned} D_i &= a_0 n_i \mu(t - a_1 \tau), \\ E_i &= n_i \lambda(t - a_2 \tau) + a_{30} \mu \frac{t - a_1 \tau}{t}. \end{aligned} \quad (15)$$

$n_i(t + \tau) > T_0$  の場合、(13) は

$$\begin{aligned} n_i \lambda(t - a_2 \tau) + a_0 a_{30} \mu \frac{t - a_1 \tau}{t} \\ \leq q_0 + a_0 a_4 \mu(t - a_1 \tau) \sum_{k=1}^{i-1} n_k. \end{aligned} \quad (16)$$

(16) が等号成立の場合、

$$\begin{aligned} n_i &= \frac{1}{\lambda(t - a_2 \tau)} \left( q_0 - a_0 a_{30} \mu \frac{t - a_1 \tau}{t} \right) \\ &\quad + a_0 a_4 \frac{\mu(t - a_1 \tau)}{\lambda(t - a_2 \tau)} \sum_{k=1}^{i-1} n_k. \end{aligned}$$

$n_i$  について解くと、

$$\begin{aligned} n_i &= \frac{1}{\lambda(t - a_2 \tau)} \left( q_0 - a_0 a_{30} \mu \frac{t - a_1 \tau}{t} \right) \\ &\quad \times \left[ 1 + a_0 a_4 \frac{\mu(t - a_1 \tau)}{\lambda(t - a_2 \tau)} \right]^{i-1}. \end{aligned} \quad (17)$$

したがって、(11) より

$$\begin{aligned} D_i &= \frac{\mu(t - a_1 \tau)}{\lambda(t - a_2 \tau)} \left( q_0 - a_0 a_{30} \mu \frac{t - a_1 \tau}{t} \right) \\ &\quad \times \left[ 1 + a_0 a_4 \frac{\mu(t - a_1 \tau)}{\lambda(t - a_2 \tau)} \right]^{i-1}, \\ D_0 &= \sum_{k=1}^m D_k = \frac{q_0}{a_0 a_4} \left[ 1 - \frac{a_0 a_{30} \mu(t - a_1 \tau)}{q_0 t} \right] \\ &\quad \left\{ \left[ 1 + a_0 a_4 \frac{\mu(t - a_1 \tau)}{\lambda(t - a_2 \tau)} \right]^m - 1 \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

$D_0$  を最小化するのに最適な  $\mu^*$  を導出する。 $D_0$  を  $\mu$  で微分し、ゼロにすると、

$$\begin{aligned} \left[ 1 + a_0 a_4 \frac{\mu(t - a_1 \tau)}{\lambda(t - a_2 \tau)} \right]^{m-1} \\ \times \left[ 1 - \frac{m a_4 q_0 t}{a_{30} \lambda(t - a_2 \tau)} + (m + 1) a_0 a_4 \frac{\mu(t - a_1 \tau)}{\lambda(t - a_2 \tau)} \right] = 1. \end{aligned} \quad (19)$$

方程式 (19) の左辺を  $Q(\mu)$  で表すと、

$$\begin{aligned} Q(0) &= 1 - \frac{m a_4 q_0 t}{a_{30} \lambda(t - a_2 \tau)} < 1, \\ Q(\infty) &= \infty. \end{aligned} \quad (20)$$

$Q(\mu)$  は  $\mu$  で厳密に増加しているため、 $D_0$  を最大化する有限で一意的な  $\mu^*$  ( $0 < \mu^* < \infty$ ) が存在する。

#### 5 数値計算

表1は、 $a_0 = 80, 90, 100$ ,  $\lambda = 0.8, 0.9, 1.0$ ,  $\mu = 0.8, 0.9, 1.0$  のときの、(3) を満たす時間  $t_0$  を表す。 $a_0, \mu, 1/\lambda$  が増加したとき、 $t_0$  が増加していることを示す。フィットネスの制限  $a_0$  が増加したとき、時間  $t_0$  が増加するのは明らかである。アスリートの体力が増加、つまり  $\lambda$  が減少すると  $t_0$  が増加するのは自然である。

$q_0, a_0, a_1, a_2, a_{30}, a_4$ , および  $\lambda$  を設定すると、 $D_0$  を最大化する最適な  $\mu^*$  が二分法によって数値的に計算される。 $q_0, a_0, a_1, a_2, a_{30}, a_4$ , および  $\lambda$  が与えられたとき、 $D_0$  を最大化する最適な  $\mu^*$  が (12), (13), および (14) から二分法により数値的に計算できる。(18) と (19) から、最適な  $\mu^*$  と  $D_0$  の近似値  $\tilde{\mu}^*$  と  $\tilde{D}_0$  が計算できる。 $q_0 = 0.010$ ,  $a_0 = 1.0$ ,  $a_1 = 0.99$ ,  $a_2 = 0.99$ ,  $a_{30} = 50.0$ ,  $a_4 = 0.01$ , および  $\lambda = 0.01$  のときに、 $\mu^* = 0.01013$  と近似値  $\tilde{\mu}^* = 0.01022$ , および  $D_0 = 0.05050$  と近似値  $\tilde{D}_0 = 0.05234$  はほぼ同じ値となる。

表2は  $q_0 = 0.01$ ,  $a_1 = a_2 = 0.99$ ,  $a_4 = 0.01$ , および  $\lambda = 0.01$  のときの最適な  $\mu^*$  と  $D_0$  を表す。 $a_{30}$  が増加したとき、 $\mu^*$  と  $D_0$  が減少することを示している。アスリートは残留疲労  $a_{30}$  が増加すると DOMS になりやすいため、 $a_{30}$  でトレーニングを続けるためにトレーニング強度  $\mu^*$  が低下するのは自然である。

表3は  $q_0 = 0.01$ ,  $a_1 = a_2 = 0.99$ ,  $a_{30} = 50$ , および  $\lambda = 0.01$  のときの  $\mu^*$  と  $D_0$  を表す。 $a_4$  が増加したとき、 $\mu^*$  と  $D_0$  が増加している。 $a_4$  で超回復の効果が期

待できるため、 $a_4$ が増加するとトレーニング強度  $\mu^*$ が増加するという直感と一致している。

表4は  $a_1 = a_2 = 0.99, a_{30} = 50, a_4 = 0.01$ , および  $\lambda = 0.01$  のときの最適な  $\mu^*$  と  $D_0$  を表す。  $q_0$ が増加したとき、 $\mu^*$  と  $D_0$  は増加する。アスリートは疲労レベルの制限  $q_0$ が増加すると DOMS が発生するリスクがわずかとなるため、トレーニング強度  $\mu^*$  が  $q_0$  とともに増加するという直感と一致している。

表5は  $q_0 = 0.01, a_1 = a_2 = 0.99, a_{30} = 50$ , および  $a_4 = 0.01$  のときの最適な  $\mu^*$  と  $D_0$  を表す。  $\lambda$ が増加したとき、 $\mu^*$  と  $D_0$  は減少する。アスリートの体力が低下すると、アスリートの体力が  $\lambda$  とともに減少するため、トレーニング強度  $\mu^*$  が低下するのは自然である。

表2-5において、 $\mu^*$  に伴い  $D_0$  は増加している。トレーニング強度  $\mu^*$ が増加するとアスリートはより激しくトレーニングする余裕があるため、累積フィットネス  $D_0$  は  $\mu^*$  とともに増加するという直感と一致している。

## 6 まとめ

本研究では経験的な数学的トレーニングモデルを確立し、最適なトレーニング計画を解析的に議論した。フィットネスと疲労の関数が割り当てられ、残留疲労と超回復による身体的向上を考慮する累積フィットネスを計算し、累積フィットネスを最大化する最適なトレーニング強度を議論した。関数を近似することにより、有限で一意的な最適なトレーニング強度を解析的に示した。数値計算の結果は、正確なおよび近似の最適なトレーニング強度が小数点以下4桁に等しく、感度分析の結果がアスリートの直感と一致していることを示している。今後、実際のデータを用いて提案モデルの各種パラメータの設定方法について明確化していく。

## 7 表

表1:  $P_1(t_0) = Q_1(t_0)$  を満たす時間  $t_0$

$a_0$	$\lambda$	$\mu$	$t_0$
100	1.0	1.0	4.61
90	1.0	1.0	4.50
80	1.0	1.0	4.38
100	0.9	1.0	5.12
100	0.8	1.0	5.77
100	1.0	0.9	4.60
100	1.0	0.8	4.59

表2:  $q_0 = 0.01, a_1 = a_2 = 0.99, a_4 = 0.01$ , および  $\lambda = 0.01$  のときの最適な  $\mu^*$  と  $D_0$ .

$a_{30}$	$\mu^*$	$D_0$
49.0	0.01034	0.05156
49.5	0.01023	0.05102
50.0	0.01013	0.05050
50.5	0.01002	0.04999
51.0	0.00992	0.04949

表3:  $q_0 = 0.01, a_1 = a_2 = 0.99, a_{30} = 50$ , および  $\lambda = 0.01$  のときの最適な  $\mu^*$  と  $D_0$ .

$a_4$	$\mu^*$	$D_0$
0.010	0.01013	0.05050
0.015	0.01023	0.05102
0.020	0.01033	0.05154
0.025	0.01044	0.05208
0.030	0.01055	0.05263

表4:  $a_1 = a_2 = 0.99, a_{30} = 50, a_4 = 0.01$ , および  $\lambda = 0.01$  のときの最適な  $\mu^*$  と  $D_0$ .

$q_0$	$\mu^*$	$D_0$
0.010	0.01010	0.05050
0.009	0.00810	0.04040
0.008	0.00607	0.03028
0.007	0.00404	0.02016
0.006	0.00200	0.01002

表5:  $q_0 = 0.01, a_1 = a_2 = 0.99, a_{30} = 50$ , および  $a_4 = 0.01$  のときの最適な  $\mu^*$  と  $D_0$ .

$\lambda$	$\mu^*$	$D_0$
0.0100	0.01013	0.05050
0.0101	0.01002	0.04999
0.0102	0.00992	0.04948
0.0103	0.00982	0.04897
0.0104	0.00972	0.04846

## 参考文献

- [1] R. Morton, J. Fitz-Clarke, and E. Banister, "Modeling human performance in running." *J. Appl. Physiol.*, vol. 69, no. 3, pp1171-77, 1990.
- [2] J. Perl, "A Metamodel for Simulation of Load Performance Interaction." *European Journal of Sport Science*, vol.1, no. 2, pp1-13, 2001.
- [3] W. Krieger, "Single vs. multiple sets of resistance exercise for muscle hypertrophy: a meta-analysis." *J. Strength Cond. Res.*, vol 24, no. 4, pp1150-59, 2010.
- [4] V. Kumar, P. Atherton, A. Selby, D. Rankin, J. Williams, K. Smith, N. Hiscock, and M. Rennie, "Muscle Protein Synthetic Responses to Exercise: Effects of Age, Volume, and Intensity." *The Journals of Gerontology Med. Series*, vol. 67, no. 11, pp1170-7, 2012.
- [5] 黒田 英三, V. Klissouras, and J. Milsum, "随意運動における筋電位の定量的解析および疲労の影響." *バイオメカニズム*, vol. 1, pp47-55, 1972.